

2-赋范空间和拟 Banach 空间中的华罗庚不等式*

华柳斌¹, 黎永锦²

(1. 广州松田职业学院, 广东 广州 511370;
2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 华罗庚在 1965 年发现的华罗庚不等式在数论中有着重要的应用, 它得到了很多的推广。将华罗庚不等式推广到严格凸的 2-赋范空间和拟 Banach 空间。

关键词: 华罗庚不等式; 2-赋范空间; 拟 Banach 空间

中图分类号: O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 03-0013-03

Hua Lo-Keng Inequality In 2-Normed Spaces and Quasi-Banach Spaces

HUA Liubin¹, LI Yongjin²

(1. Guangzhou Sontan Polytechnic College, Guangzhou 511370, China;
2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The inequality discovered by L. K. Hua in 1965 play an important role in number theory and has been generalized in several directions. The Hua Lo-Keng inequality is generalized in 2-normed spaces and quasi-Banach spaces.

Key words: Hua Lo-Keng inequality; 2-normed spaces; Quasi-Banach spaces

华罗庚在 1965 发现了下面在数论中有重要应用的不等式, 华罗庚不等式得到了很多的推广。

定理 1 (华罗庚不等式^[1]). 如果 $\delta, \alpha > 0$ 和 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, 那么

$$(\delta - \sum_{i=1}^n x_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\alpha \delta^2}{\alpha + n} \quad (1)$$

在 (1) 中, 等式成立当且仅当 $x_1 = \dots = x_n = \delta/(\alpha + n)$ 。

Dragomir 等^[2]将 (1) 推广到实内积空间。

定理 2 设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 为实内积空间, 若 $x, y \in X$ 和 $\alpha > 0, \delta > 0$ 。则

$$(\delta - (x, y))^2 + \alpha \|x\|^2 \geq \frac{\alpha \delta^2}{\alpha + \|y\|^2} \quad (2)$$

并且不等式 (2) 中, 等式成立当且仅当 $x = \delta/(\alpha + \|y\|^2)$ 。

Dragomir 等^[2]也给出了有意思的推广。

定理 3 设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 为实内积空间, 若

$x_i, y \in X$ 和 $\alpha > 0$ 。则

$$\|y - \sum_{i=1}^n x_i\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \geq \frac{\alpha}{\alpha + n} \|y\|^2 \quad (3)$$

并且不等式 (3) 中, 等式成立当且仅当 $x_i = \delta y/(n + \alpha)$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立。

Jovanovic^[3]将 [2] 中的结果扩展到严格凸的赋范空间。

定理 4 设 X 是严格凸的赋范空间, 若 $x_i \in X (i = 1, 2, \dots, n)$, $y \in X$ 且 $\alpha > 0$ 。则

$$\|y - \sum_{i=1}^n x_i\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \geq \frac{\alpha}{\alpha + n} \|y\|^2 \quad (4)$$

并且不等式 (4) 中, 等式成立当且仅当 $x_i = \delta y/(n + \alpha)$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立。

在本文中, 我们将上面结果推广到 2-赋范空

* 收稿日期: 2008-04-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10871213)

作者简介: 华柳斌 (1977 年生), 女, 讲师, 硕士; 通讯作者: 黎永锦; E-mail: stslj@mail.sysu.edu.cn

间和拟 Banach 空间。

1 主要结果

设 X 是维数大于 1 的线性空间, 下面定义是 [4] 引进的。若 $\|\cdot, \cdot\|$ 是 $X \times X$ 上的实函数, 并满足下面条件, 则称 X 为 2-赋范空间:

(1) $\|x, y\| = 0$ 当且仅当 x 和 y 是线性相关的;

(2) $\|x, y\| = \|y, x\|$;

(3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$ 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 成立;

(4) $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$ 。

若 $x, y, z \in X$ 是非零向量, 用 $V(x)$, $V(x, y)$ 和 $V(x, y, z)$ 分别记 X 中由 x , x 和 y , x 和 y 及 z 生成的线性流形。回顾 [1] 中 2-赋范空间 X 称为严格凸的是指: 当 $\frac{1}{2}\|x + y, z\| = \|x, z\| = \|y, z\| = 1$ 对任意 $x, y, z \in X$ 成立时, 有 $x = y$ 。这里我们将华罗庚不等式推广到严格凸的 2-赋范空间。

定理 5 设 $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 是严格凸的 2-赋范空间, 若 $x_i \in X (i = 1, 2, \dots, n)$, $y \in X$ 和 $\alpha > 0$ 。则对任意 $z \notin V(x_1, \dots, x_n, y)$, 有

$$\|(y - \sum_{i=1}^n x_i), z\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \|x_i, z\|^2 \geq \frac{\alpha}{\alpha + n} \|y, z\|^2 \quad (5)$$

并且不等式 (5) 中, 等式成立当且仅当 $x_i = \delta y / (n + \alpha)$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立。

证明 对 $t \in \mathbb{R}$, $\delta, \alpha > 0$, 有

$$(\delta - t)^2 + \alpha t^2 \geq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \delta^2 \quad (6)$$

并且不等式 (6) 中, 等式成立当且仅当 $t = \delta / (1 + \alpha)$ 。

下面用归纳法, 对 $n = 1$, 由三角不等式和 (6), 有

$$\|(y - x_1), z\|^2 + \alpha \|x_1, z\|^2 \geq (\|y, z\| - \|x_1, z\|)^2 + \alpha \|x_1, z\|^2 \geq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \|y, z\|^2 \quad (7)$$

并且不等式 (7) 中, 等式成立当且仅当

$$\|y - x_1, z\| = \|y, z\| - \|x_1, z\| \quad (8)$$

和

$$\|x_1, z\| = \frac{1}{1 + \alpha} \|y, z\| \quad (9)$$

由 $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 的严格凸性^[6]和 $z \notin V(x_1, y)$, 可知对某个 $\lambda > 0$, 有 $y - x_1 = \lambda x_1$, 因此

$$x_1 = \frac{1}{1 + \lambda} y \quad (10)$$

根据 (9) 和 (10), 可得 $x_1 = y / (1 + \alpha)$ 。所以不等式 (5) 对 $n = 1$ 成立。

假设不等式 (5) 对 $n = k$ 成立, 则对 $n = k + 1$, 有

$$\begin{aligned} & \|(y - \sum_{i=1}^{k+1} x_i), z\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i, z\|^2 = \\ & \|(y - \sum_{i=1}^k x_i) - x_{k+1}, z\|^2 + \alpha \|x_{k+1}, z\|^2 + \\ & \alpha \sum_{i=1}^k \|x_i, z\|^2 \geq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \|y - \sum_{i=1}^k x_i, z\|^2 + \\ & \alpha \sum_{i=1}^k \|x_i, z\|^2 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} [\|y - \sum_{i=1}^k x_i, z\|^2 + \\ & (1 + \alpha) \sum_{i=1}^k \|x_i, z\|^2] \geq \end{aligned}$$

$$(\frac{\alpha}{1 + \alpha})(\frac{1 + \alpha}{k + 1 + \alpha}) \|y, z\|^2 = \frac{\alpha}{k + 1 + \alpha} \|y, z\|^2$$

并且等号成立当且仅当

$$x_{k+1} = \frac{1}{1 + \alpha} (y - \sum_{i=1}^k x_i)$$

和

$$x_i = \frac{1}{(k + 1) + \alpha} y \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

因此 $x_i = \frac{1}{k + \alpha} y (i = 1, 2, \dots, k + 1)$ 。所以不等式

(5) 对 $n = k + 1$ 成立, 由归纳法原理可知不等式 (5) 对所有的 n 成立。

拟 Banach 空间是将 Banach 空间的三角不等式 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 换成了存在 $C \geq 1$ 使得 $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ 对所有的 $x, y \in X$ 都成立, 明显地, 拟 Banach 空间是 Banach 空间的自然推广。

定义 1 设 X 是线性空间, $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ 是 X 上的泛函, 并对所有的 $x, y \in X$, 有

① $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

② $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ 对所有的 λ 成立;

③ $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, 这里 $C \geq 1$ 不依赖于 x, y 。

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 的一个拟范数。如果 X 在 $\|\cdot\|$ 下是完备的, 那么称 X 是拟 Banach 空间。

拟 Banach 空间是局部有界的拓扑线性空间, $l_p (0 < p < 1)$ 就是一个拟 Banach 空间。

下面证明拟 Banach 空间中的华罗庚不等式。

定理 6 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是拟 Banach 空间, 若 $x_i \in X (i = 1, 2, \dots, n)$, $y \in X$ 和 $\alpha > 0$ 。则

$$\|y - \sum_{i=1}^n x_i\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \geq \frac{\alpha}{C^{2n}\alpha + \sum_{i=1}^n C^{2i}} \|y\|^2 \quad (11)$$

证明 用归纳法。对 $n = 1$, 由三角不等式和 (6), 有

$$\|y - x_1\|^2 + \alpha \|x_1\|^2 \geq \left(\frac{1}{C} \|y\| - \|x_1\|\right)^2 + \alpha \|x_1\|^2 \geq \frac{\alpha}{C^2(1+\alpha)} \|y\|^2 \quad (12)$$

假设不等式 (11) 对 $n = k$ 成立, 则

$$\|y - \sum_{i=1}^k x_i\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 \geq \frac{\alpha}{C^{2k}\alpha + \sum_{i=1}^k C^{2i}} \|y\|^2 \quad (13)$$

因此, 对 $n = k + 1$, 有

$$\begin{aligned} \|y - \sum_{i=1}^{k+1} x_i\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|^2 &= \|(y - \sum_{i=1}^k x_i) - x_{k+1}\|^2 + \alpha \|x_{k+1}\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 \geq \\ &\frac{\alpha}{C^2(1+\alpha)} \|y - \sum_{i=1}^k x_i\|^2 + \alpha \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 = \\ &\frac{\alpha}{C^2(1+\alpha)} \left[\|y - \sum_{i=1}^k x_i\|^2 + C^2(1+\alpha) \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 \right] \geq \\ &\left[\frac{\alpha}{C^2(1+\alpha)} \right] \left[\frac{C^2(1+\alpha)}{C^{2k}C^2(1+\alpha) + \sum_{i=1}^k C^{2i}} \right] \|y\|^2 = \\ &\left(\frac{\alpha}{C^{2(k+1)}C^2\alpha + \sum_{i=1}^{k+1} C^{2i}} \right) \|y\|^2 \end{aligned}$$

所以不等式 (11) 对 $n = k + 1$ 成立, 由归纳法原理可知不等式 (11) 对所有的 n 成立。

我们知道若当 $x, y \in X$ 线性无关时, 都有 $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$, 则 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称为严格凸的。Banach 空间的严格凸性, 容易推广到拟 Banach 空间。当 $x, y \in X$, 并且 x 和 y 都不为

零时, 都有 $\|x + y\| < C(\|x\| + \|y\|)$, 我们称拟 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格凸的。但是, 不难证明不等式 (11) 中的等号在 $x_i = \frac{1}{n+\alpha}y$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时是不成立的。

参考文献:

- [1] HUA L K. Additive Theory of Prime Numbers [M]. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 13, American Mathematical Society, Rhode Island, 1965, translated by N. B. Ng.
- [2] DRAGOMIR S S, YANG G S. On Hua's inequality in real inner product spaces [J]. Tamkang Math, 1996, 27 (3): 227-232.
- [3] JOVANOVIĆ M S. On Hua's inequality in strictly convex normed spaces [J]. Univ Beograd Publ Elektrotehn Fak Ser Mat, 1998, 9: 47-49.
- [4] GAHLER S. Linear 2-normed spaces [J]. Math Nachr, 1965, 28: 1-43.
- [5] DIMINNIE C, GAHLER S, WHITE A. Strictly convex linear 2-normed spaces [J]. Math Nachr, 1974, 59: 319-324.
- [6] LIN C S. On strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces II [J]. Internat J Math Math Sci, 1992, 15(3): 417-423.
- [7] PEARCE C E M, PECARIC J E. A remark on the Lo-Keng Hua inequality [J]. J Math Anal Appl, 1994, 88 (2): 700-702.
- [8] TAKAGI H, MIURA T, KANZO T. A reconsideration of Hua's inequality [J]. J Inequal Appl 2005, 1: 15-23.
- [9] TAKAGI H, MIURA T, HAYATA T, et al. A reconsideration of Hua's inequality. II [J]. J Inequal Appl, 2006, ART ID 21540: 8.
- [10] WANG C L, HUA Lo-keng. inequality and dynamic programming [J]. J Math Anal Appl, 1992, 166(2): 345-350.